

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۲/۲۹	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳		مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی $n > 6$ ، ثابت کنید:	۱/۷۵
	$n! > 3^n$	
۲	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع مربعات هر دو عدد فرد همواره عددی زوج است.	۱
۳	یک مدرسه حداقل چه تعداد دانش آموز باید داشته باشد تا دست کم ۱۳ دانش آموز در یک ماه از سال متولد شده باشند.	۰/۷۵
۴	اگر $a, b$ دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:	۱/۲۵
	$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	
۵	کدام یک از احکام زیر درست و کدام یک نادرست است؟ برای احکام نادرست مثال نقض بیاورید. الف) برای هر دو مجموعه دلخواه $A, B$ داریم: $A \times B = B \times A$ ب) اگر $n^2$ مضرب ۳ باشد آنگاه $n$ نیز مضرب ۳ است.	۰/۷۵
۶	مجموعه های $A = \{x   x \in Z, x^2 < 1\}$ و $B = \{\frac{1-x}{2}   x \in N, x \leq 2\}$ مفروضند: الف) مجموعه های $A, B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید. ب) اعضای مجموعه $A \Delta B$ را مشخص کنید.	۱/۲۵
۷	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، ثابت کنید اگر $A \cup B = A \cap B$ آنگاه $A = B$	۱
۸	اگر $A = (-\infty, -1]$ و $B = [-2, 3]$ باشد، نمودار حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ را رسم کنید.	۰/۷۵
۹	رابطه ی $R$ روی $Z$ به صورت ذیل تعریف شده است: $x R y \Leftrightarrow 4 x - y$ الف) نشان دهید که $R$ یک رابطه هم ارزی است. ب) رابطه ی $R$ مجموعه $Z$ را به چند کلاس هم ارزی افراز می کند؟	۱/۵
۱۰	اگر رابطه ی $R$ بر روی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به صورت زیر تعریف شده باشد: $x R y \Leftrightarrow -10 \leq x + 5y \leq 10$ رابطه ی $R$ را به صورت زوج های مرتب مشخص کنید.	۱

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۲/۲۹	تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳		مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	

ردیف	سؤالات	نمره
------	--------	------

	« ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم »	
۱۱	<p>در خانواده ای با سه فرزند:</p> <p>الف) فضای نمونه را بنویسید.</p> <p>ب) پیشامد A که در آن خانواده حداکثر یک فرزند دختر باشد.</p> <p>پ) پیشامد B که در آن خانواده فقط یک دختر باشد.</p> <p>ت) پیشامد <math>A' \cup B'</math> را مشخص کنید.</p>	۲
۱۲	<p>از کیسه ای که شامل ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز و یک مهره سفید است، ۲ مهره با هم به تصادف بیرون می آوریم</p> <p>احتمال آنکه مهره ها هم رنگ باشند چقدر است؟</p>	۱/۵
۱۳	<p>تاس سالمی را ۸ بار پرتاب می کنیم، احتمال آنکه حداقل ۶ بار عددی اول ظاهر شود چقدر است؟</p>	۰/۷۵
۱۴	<p>اگر <math>S = \{a, b, c, d\}</math> فضای نمونه ای یک تجربه ی تصادفی و <math>p(b) = \frac{1}{3}</math>، <math>p(\{b, d\}) = \frac{1}{4}</math> و <math>p(\{b, c\}) = \frac{2}{3}</math> باشد آنگاه <math>p(a)</math> را به دست آورید.</p>	۱/۲۵
۱۵	<p>دو عدد حقیقی به تصادف بین <math>0</math> و <math>2</math> انتخاب می کنیم، احتمال آنکه <math> x - y  &lt; 1</math> را محاسبه کنید.</p>	۲
۱۶	<p>عددی به تصادف از مجموعه <math>\{1, 2, 3, \dots, 1000\}</math> انتخاب می کنیم، احتمال این که عدد انتخابی بر ۴ بخش پذیر باشد، اما بر ۷ بخش پذیر نباشد، چقدر است؟</p>	۱/۵
	« موفق باشید »	جمع نمره
		۲۰

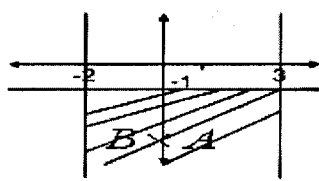
ساعت شروع: ۸ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۲ / ۲۹		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱/۷۵	$p(y): y! > 3^y \quad (۰/۲۵)$ $p(k): K! > 3^k \quad (۰/۲۵)$ $P(k+1): (k+1)! > 3^{k+1} \quad (۰/۲۵)$ <p>دو طرف فرض را در <math>K+1</math> ضرب می کنیم.</p> $K! (k+1) > 3^k (k+1) \quad (۰/۲۵)$ $(k+1)! > 3^k (k+1) \quad (۰/۲۵)$ <p>باید ثابت کنیم: <math>3^k (k+1) &gt; 3^{k+1}</math></p> $3^k (k+1) > 3^k \times 3 \rightarrow (k+1) > 3 \quad (۰/۲۵)$ <p>باتوجه به اینکه <math>k &gt; 6</math> است درستی عبارت فوق بدیهی است. (۰/۲۵)</p>	۱
۱	$\left. \begin{array}{l} x = 2n+1 \\ y = 2m+1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = (2n+1)^2 + (2m+1)^2 =$ <p>(۰/۲۵)</p> $2(2n^2 + 2n + 2m^2 + 2m + 1) = 2k \quad (۰/۲۵)$ <p>(۰/۲۵)</p>	۲
۰/۷۵	<p>m = تعداد کبوتر</p> <p>n = تعداد لانه = ۱۲</p> <p>طبق اصل لانه کبوتری حداقل در یکی از لانه ها <math>12+1=13</math> کبوتر است. (۰/۲۵)</p> <p>و همچنین <math>m = (12 \times 12) + 1 = 145</math> (۰/۲۵) دانش آموز وجود دارد (۰/۲۵)</p>	۳
	« ادامه در صفحه ی دوم »	

ساعت شروع: ۸ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۲ / ۲۹		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱/۲۵	$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \quad (۰/۵)$ <p>با توجه به اینکه عبارت فوق همواره درست است و بر طبق استدلال برگشتی تمامی روابط برگشت پذیر می‌باشد. (۰/۲۵)</p>	۴
۰/۷۵	الف) نادرست (۰/۲۵) مثال نقض (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵)	۵
۱/۲۵	<p>الف) <math>A = \{0\} \quad (۰/۲۵) \quad , \quad B = \left\{0, -\frac{1}{2}\right\} \quad (۰/۲۵)</math></p> <p>ب) <math>A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \left\{0, -\frac{1}{2}\right\} - \{0\} = \left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad (۰/۲۵)</math> (۰/۵)</p>	۶
۱	$\left. \begin{array}{l} (A \cap B) \subseteq A \\ B \subseteq (A \cup B) \Rightarrow B \subseteq (A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow B \subseteq A \quad (۰/۵)$ <p>به همین ترتیب ثابت میشود:</p> <p>(۰/۲۵) <math>A \subseteq B</math></p> <p>بنابراین:</p> <p>(۰/۲۵) <math>A = B</math></p>	۷
۰/۷۵	 <p>رسم نمودار (۰/۷۵) نمره</p>	۸
	« ادامه در صفحه ی سوم »	

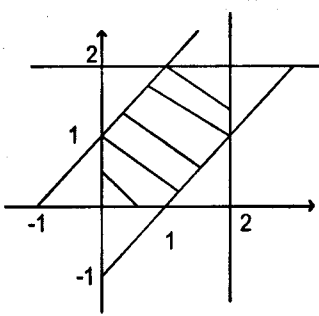
ساعت شروع: ۸ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۲ / ۲۹		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۹	الف) $\forall x \in Z, xRx \Rightarrow \neg(x-x) \Rightarrow \neg 0$ رابطه بازتابی (۰/۲۵) ب) $xRy \Rightarrow \neg(x-y) \Rightarrow \neg(y-x) \Rightarrow \neg(y-x) \Rightarrow yRx$ رابطه تقارنی (۰/۲۵) ج) $\left. \begin{array}{l} xRy \Rightarrow \neg(x-y) \Rightarrow x-y = \neg k \\ yRz \Rightarrow \neg(y-z) \Rightarrow y-z = \neg k' \end{array} \right\} \Rightarrow x-z = \neg(k+k') = \neg k'' \Rightarrow xRz \quad (۰/۲۵)$ رابطه تعدی است. (۰/۲۵) رابطه هر سه خاصیت را دارد پس هم ارزی است. (۰/۲۵) رابطه مجموعه اعداد صحیح را به $\mathbb{Z}$ کلاس هم ارزی افراز می کند. (۰/۲۵)	۱/۵
۱۰	۱ $R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$	۱
۱۱	۲ $S = \{(d,d,d), (d,d,p), (d,p,d), (p,d,d), (p,p,p), (p,d,p), (d,p,p), (p,p,d)\} (۰/۵)$ $A = \{(p,p,p), (p,d,p), (d,p,p), (p,p,d)\} (۰/۵)$ $B = \{(p,d,p), (d,p,p), (p,p,d)\} (۰/۵)$ $A' \cup B' = \{(d,d,d), (d,d,p), (d,p,d), (p,d,d), (p,p,p)\} (۰/۵)$	۲
۱۲	۱/۵ $p(A) = \frac{C(4,2) + C(3,2)}{C(7,2)} = \frac{6 + 3}{21} = \frac{9}{21} (۰/۲۵)$	۱/۵
۱۳	۰/۷۵ $p(A) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{\binom{n}{6} + \binom{n}{7} + \binom{n}{8}}{2^n} (۰/۲۵)$	۰/۷۵
	"ادامه در صفحه ی چهارم"	

ساعت شروع: ۸ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۲ / ۲۹		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۳

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱/۲۵	$p(\{b,c\}) = \frac{2}{3} \Rightarrow p(b) + p(c) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} + p(c) = \frac{2}{3} \Rightarrow p(c) = \frac{1}{3}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $p(\{b,d\}) = \frac{1}{2} \Rightarrow p(b) + p(d) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} + p(d) = \frac{1}{2} \Rightarrow p(d) = \frac{1}{6}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1 \Rightarrow p(a) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \Rightarrow p(a) = \frac{1}{6}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>	۱۴
------	--	----

۲	$S = \{(x, y) \mid 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $A = \{(x, y) \mid -1 < x - y < 1\}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> <p style="text-align: right;">رسم شکل (۰/۵)</p>  $p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}{4} = \frac{2}{4}$ <p style="text-align: center;">(۰/۵) (۰/۲۵)</p>	۱۵
---	---	----

۱/۵	$n(A \cap B) = \left[ \frac{10000}{28} \right] = 357$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $n(A) = \left[ \frac{10000}{4} \right] = 2500$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> $P(A \cap B') = p(A) - p(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B') = \frac{2500}{10000} - \frac{357}{10000} = \frac{2143}{10000}$ <p style="text-align: center;">(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>	۱۶
-----	---	----

۲۰	جمع نمره	« موفق باشید »
----	----------	----------------

مصححین گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.



## تشابه سؤالات امتحان نهایی سوم دبیرستان با سؤالات پرتکرار درس جبر و احتمال

تاریخ امتحان: ۲۹ اردیبهشت ۹۳

شماره‌ی سؤال برگه‌ی امتحانی	شماره سؤال کتاب پرتکرار	دلیل تشابه
۱	۲۶	سؤالات عیناً یکی هستند و درجه‌ی دشواری سؤال ۲۶ کتاب دوسالانه بیش‌تر است، چون پایه‌ی استقراء را هم از دانش‌آموز سؤال کرده است.
۲	۳۰	در سؤال ۳۰ به جای مجموع مربعات، تفاضل مربعات را در نظر گرفته ولی از نظر استدلال کلی دو سؤال راه‌حل مشابهی دارند.
۳	۸۲	هر دو سؤال از مبحث اصل لانه‌ی کبوتری هستند و تیپ کلی دو سؤال یکسان است، زیرا هر دو تعداد کبوترها را به عنوان مجهول در نظر گرفته‌اند و راه‌حل مشابهی دارند.
۴	۴۹	هر دو سؤال از مبحث اثبات بازگشتی هستند، علاوه بر این با مجموع طرفین سؤال ۴۹ با $xy$ دو سؤال عیناً یکی می‌شوند و راه‌حل کاملاً مشابهی دارند.
۵	قسمت ب مشابه سؤال ۶۵- قسمت الف	سؤالات عیناً یکی هستند.
۶	قسمت الف مشابه سؤال ۹۲- قسمت ب- مشابه سؤال ۱۲۴	در سؤال ۹۲ نیز یک مجموعه به صورت گزاره‌ها نوشته شده و اعضای آن خواسته شده در سؤال ۱۲ نیز مشخص کردن اعضای $A \cup B$ مدنظر است.
۷	۱۱۲	عیناً مشابه هستند.
۸	۱۵۰	هر دو سؤال بازه‌های $A$ و $B$ را داده و رسم حاصل ضرب دکارتی را خواسته‌اند.
۹	۱۶۵-۱۶۷-۱۶۹	در همه‌ی این سؤالات یک رابطه داده شده و اثبات هم‌ارزی بودن آن و مشخص کردن کلاس‌های هم‌ارزی خواسته شده است.
۱۰	۱۵۷	در هر دو سؤال مشخص کردن اعضای یک رابطه خواسته شده است.
۱۱	۱۹۰	در هر دو سؤال فضای نمونه و تعدادی پیشامد خواسته شده و در نهایت نیز عملیات جبری روی پیشامدها را مدنظر داشته‌اند، سؤالات راه‌حل مشابهی دارند.
۱۲	۲۱۰	هر دو سؤال از مبحث احتمال هم‌شانس در فضای گسسته هستند و راه‌حل مشابهی دارند.
۱۳	۲۰۵	هر دو سؤال از مبحث احتمال دو جمله‌ای هستند و راه‌حل یکسانی دارند.
۱۴	۲۱۸	هر دو سؤال از مبحث احتمال غیرهم‌شانس بوده و راه‌حل مشابهی دارند.